

多峰函数优化的黄金分割斐波那契树优化算法

张松海, 施心陵, 李 鹏, 董 易, 李孙寸

(云南大学信息学院, 云南昆明 650500)

摘 要: 针对多峰函数优化问题, 基于斐波那契树优化算法, 结合黄金分割思想, 提出一种黄金分割斐波那契树优化算法. 该算法利用斐波那契树优化算法全局局部交替寻优特性, 通过在寻优过程中对优化问题解空间进行黄金分割比例压缩, 从而提高算法局部搜索能力与小峰值搜索能力. 多峰函数优化的仿真结果表明, 该算法多峰优化能力强、速度快、精度高.

关键词: 多峰优化; 斐波那契树优化算法; 黄金分割法; 全局局部交替

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)04-0791-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.04.004

Golden Section Fibonacci Tree Optimization Algorithm for Multimodal Function Optimization

ZHANG Song-hai, SHI Xin-ling, LI Peng, DONG Yi, LI Sun-cun

(School of Information Science and Engineering, Yunnan University, Kunming, Yunnan 650500, China)

Abstract: A golden section Fibonacci tree optimization algorithm for multimodal function optimization is proposed, which is based on the Fibonacci tree optimization algorithm (FTO) and is combined with the golden section theory. By making full use of the features upon the global and local alternation optimization of Fibonacci tree optimization, the algorithm has improved and enhanced its local searching ability and small peak searching ability through the method of golden section ratio compression to optimize problems of solution space. Simulation result of typical test function shows that the algorithm owns strong optimization capacity, fast speed as well as high precision.

Key words: multimodal function optimization; Fibonacci tree optimization; golden section; global and local alternation

1 引言

随着计算机技术的发展, 智能优化算法在实际优化问题中取得了长足的进步和显著的成绩^[1], 新发展出例如量子禁忌搜索算法^[2]、逻辑运算的离散人工蜂群算法^[3]、自适应变异的粒子群优化算法^[4]等一系列优化算法. 一般的智能优化算法在实际优化问题中往往只注重问题的全局最优解而忽略其局部最优解. 但在实际优化问题中, 如复杂系统参数及结构优化、组合优化等, 常存在着多个或一个全局最优解以及其他多个有价值的局部最优解, 它们都可归为多峰函数优化问题或多模态函数优化问题 (Multimodal Function Optimization, MFO)^[5]. 因此, 有效、快速的构造一种能求出全部全局最优解及尽可能多的局部解的优化算法成为

优化领域的重要研究方向. 对此, 传统的收敛于全局的智能算法如遗传算法、蚁群算法、粒子群算法等, 通过改进算法来实现多峰函数寻优. 如面向多峰函数的小生境人工蜂群算法^[6]、小生境遗传算法^[7]、小生境人工鱼群算法^[8]、基于小生境的粒子群算法^[9,10]、改进的遗传算法^[11-13]等. 这些算法在一定程度上取得了较好的效果, 但算法存在局部搜索能力弱的缺点, 很难获得较多的峰值点. 基于免疫机制与免疫网络理论提出的免疫克隆算法 (CLONALG)^[14]、人工免疫网络算法 (opt-ai-Net)^[15]等算法具有较强的多峰寻优能力, 但由于其算法本身的复杂性与寻优结果依赖于算法某些参数的设置, 使得最终寻优结果求解精度不高、易早熟、应用场合受限. 文献^[16, 17]提出一种多峰函数的多元优化算

法,取得了不错优化效果,但由于算法结构的限制,导致多峰优化能力不强.

斐波那契树优化算法(Fibonacci Tree Optimization, FTO)是基于斐波那契法的一种智能优化算法,该算法通过全局探索和局部寻优交替迭代来求解问题的最优解,同时在寻优过程中充分利用计算机内存记录下寻优过程. FTO 具有很强的全局最优解搜索能力,其搜索结果在全局范围内只朝着全局最优点进化收敛,不易陷入局部最优. 但由于全局范围内可能有不等高的山峰,在利用 FTO 进行寻优时,峰值小的山峰则可能被遗弃,从而影响 FTO 多峰寻优能力. 对此,本文提出了基于黄金分割的 FTO 多峰函数优化算法. 在 FTO 多峰寻优的每次迭代过程中,利用黄金分割法的最优性,对优化问题解空间进行黄金分割比例压缩,从而在保证算法全局寻优能力的同时提高其局部最优解寻优能力. 利用多种多峰函数对算法进行测试,测试结果表明本文算法对多峰函数优化能力强、速度快、精度高.

2 斐波那契法与黄金分割法

1953 年 Kiefer 提出了单峰函数的优选问题,并证明了分数法即斐波那契法是最优的. 黄金分割法作为斐波那契法的近似,华罗庚教授进行了其最优性的巧妙证明^[18]. 文献^[19]也给出了黄金分割法在无穷远处是最优的证明.

最优化问题的极大化问题的一般形式为:

$$\max f(\mathbf{x}) \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{x} \in X \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 是决策变量, $f(\mathbf{x})$ 为目标函数, $X \subset \mathbf{R}^n$ 为约束集或可行域. 特别地,如果约束集 $X = \mathbf{R}^n$,则最优化问题称为无约束最优化问题:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (2)$$

本文中,算法求解的是无约束最优化问题. 下面简要介绍一下利用斐波那契法与黄金分割法求解一维极大值问题. 设:

$$\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) \quad (3)$$

$\varphi(\alpha)$ 是搜索区间 $[a_1, b_1]$ 上的单峰函数. 设在第 k 次迭代是搜索区间为 $[a_k, b_k]$. 取两个试探点 $\lambda_k, \mu_k \in [a_k, b_k]$ 且 $\lambda_k < \mu_k$, 计算 $\varphi(\lambda_k)$ 和 $\varphi(\mu_k)$, 步骤如下:

(a) 若 $\varphi(\lambda_k) \leq \varphi(\mu_k)$, 则令 $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k$;

(b) 若 $\varphi(\lambda_k) \geq \varphi(\mu_k)$, 则令 $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k$.

要求两个试探点 λ_k 和 μ_k 满足:

(1) λ_k 和 μ_k 到搜索区间 $[a_k, b_k]$ 的端点等距, 即:

$$b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k \quad (4)$$

(2) 每次迭代, 搜索区间长度的缩短率相同, 即:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \quad (5)$$

其中, F_i 为斐波那契数列第 i 项, n 是计算次数.

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad (6)$$

当 $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$ 固定为 0.618 时, 斐波那契法就变为黄金分割法.

当利用黄金分割法来进行单峰寻优时, 其寻优结果精度与寻优次数的关系如式(7)所示:

$$\sigma = 0.618^{n-1} \quad (7)$$

其中 σ 为结果精度, n 为寻优次数. 如寻优结果精度为 0.05, 则利用黄金分割法只需要进行 8 次试验.

3 黄金分割斐波那契树优化算法

3.1 FTO 搜索元

斐波那契树优化算法(Fibonacci Tree Optimization, FTO)是一种基于斐波那契法的计算智能优化算法, 通过全局探索和局部寻优过程交替迭代来求解最优化问题. FTO 算法的搜索元结构是由斐波那契数列组成的类三角形, 如图 1 所示. 斐波那契数列的通项为式(6)所示.

搜索元的产生分为全局搜索和局部搜索两个阶段, 在全局搜索阶段通过式(8)在全局范围内随机产生全局点 G .

$$G = [h_1, h_2, \dots, h_d] \quad (8)$$

$$h_i = \text{unrand}(\min_i, \max_i)$$

式(8)中, d 是问题的维度; \min 和 \max 分别为问题空间第 i 维的下界和上界; $\text{unrand}(\min_i, \max_i)$ 函数返回一个均匀分布在 \min_i 和 \max_i 之间的随机数. 在局部搜索阶段, 前一列适应度值最好的元素 fit_{best} 和新生成的全局点 G 分别与前一列其他元素按照式(9)生成新的局部点. 其产生方法如图 2 所示.

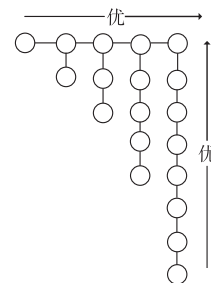


图1 FTO搜索元结构

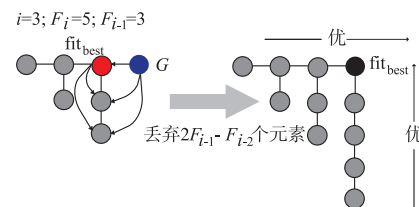


图2 搜索元局部点产生方法

$$t_{ji} = [\text{temp}_{j1}, \dots, \text{temp}_{jd}], (i = 2, \dots, F_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \text{temp}_{f_j} &= \min(\text{fit}_{\text{best}j}, \text{fit}_{ij}) + \frac{F_{n-1}}{F_n} \times |\text{fit}_{\text{best}j} - \text{fit}_{ij}| \\ t_{G_i} &= [\text{temp}_{G_1}, \dots, \text{temp}_{G_d}], (i = 1, \dots, F_{n-1}) \\ \text{temp}_{G_j} &= \min(G_j, \text{fit}_{ij}) + \frac{F_{n-1}}{F_n} \times |G_j - \text{fit}_{ij}| \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)中, d 是问题的维度; t_{f_j} 为前一列适应度值最好的元素 fit_{best} 与前一列第 i 个元素新生成的局部点, temp_{f_j} 为前一列适应度值最好的元素 fit_{best} 与前一列第 i 个元素的第 j 维的斐波那契试探点; t_{G_i} 为当前新生成全局点 G 与前一列第 i 个元素新生成的局部点, temp_{G_j} 为当前新生成全局点 G 与前一列第 i 个元素的第 j 维的斐波那契试探点. 则新生成局部点与全局点总和为 $2F_{i-1}$, 前一列的数目与新生成局部点数目、全局点数目总和为 $3F_{i-1}$, 而 $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$, 所以按适应度值大小丢弃 $2F_{i-1} - F_{i-2}$ 个点组成当前列的元素. 由此可以看出, FTO 的搜索元全局、局部交替进行搜索, 从而保证不陷入局部最优解, 向着全局最优解进化迭代. 搜索元算法步骤如下:

步骤 1 随机生成一个全局点初始化搜索元第一列元素.

步骤 2 生成一个新的全局搜索元 G .

步骤 3 用 G 与搜索元中的前一列的所有元素按 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 比例生成新的局部点.

步骤 4 用搜索元中的前一列适应度值最好的元素 fit_{best} 与前一列其余的元素按 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 比例生成新的局部点.

步骤 5 按适应度值大小删除 $2F_{i-1} - F_{i-2}$ 个点, 留下 $F_{i-2} + F_{i-1}$ 作为当前列的元素.

步骤 6 判断迭代条件, 符合则当前列适应度值最好的元素 fit_{best} , 否则回到步骤 2.

3.2 FTO 算法步骤

每个搜索元最终得到的适应度值最好的元素 fit_{best} 将作为下一个搜索元的第一列的元素, 即作为下一个搜索元的启发式信息, 也把 fit_{best} 叫做芽点. 每次迭代都把芽点装入一个后进先出的栈, 组成芽点集. 搜索元按照斐波那契数列生长, 从而最终长成一棵斐波那契树. 其结构如图 3 所示.

FTO 算法步骤为:

步骤 1 初始化. 用一个全局搜索元作为芽点初始化芽点集.

步骤 2 取出芽点. 在第 i 轮迭代, 从芽点集中取出按斐波那契数列计数为 $F_{i-1} + F_{i-2}$ 个芽点. 芽点按栈结构的后进先出方式出栈.

步骤 3 生成新芽点. 利用一个芽点, 用搜索元生

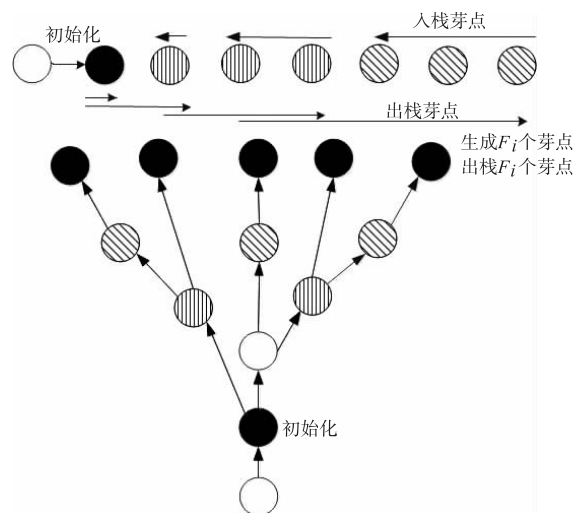


图3 斐波那契树结构示意图

成算法生成一个新的芽点, 本轮迭代共生成 $F_{i-1} + F_{i-2}$ 个新芽点.

步骤 4 将新的芽点存入芽点集. 芽点按栈结构的后进先出方式入栈.

步骤 5 判断迭代条件, 符合则输出指定芽点, 例如, 输出适应度值最好的一个芽点. 否则回到步骤 2.

从图 3 和 FTO 的算法步骤可以看出, 斐波那契树的每个节点就是一个搜索元的最优值, 搜索元在解空间内是利用斐波那契法在全局、局部交替进行寻优, 保证了算法不易陷入局部最优, 整个树每一代的节点又是基于前一代的最优节点进行生长. 因此, FTO 算法能快速、有效的向着全局最优点进化收敛.

3.3 FTO 算法收敛与时间复杂性分析

3.3.1 FTO 算法收敛性分析

定理 1 若 y_i 为当前搜索元第 i 列适应度值最优的元素, 则 $y_{i+1} \geq y_i$.

FTO 搜索元的生成步骤可证明其定理.

定理 2 若 fit_{best} 为当前搜索元适应度值最大的元素, 则由当前搜索元生成的下一个搜索元的适应度值最大的元素 $\text{fit}_{\text{best_next}}$ 大于等于 fit_{best} .

证明 由 FTO 算法可知, 每个搜索元最终得到的适应度值最好的元素 fit_{best} 将作为下一个搜索元的第一列的元素. 又由定理 1 可知搜索元下一列适应度值最好的元素大于等于前一列适应度值最好的元素. 因此: $\text{fit}_{\text{best_next}} \geq \text{fit}_{\text{best}}$.

定理 3 FTO 算法树结构中, 下一代搜索元的最大适应度值大于等于上一代搜索元的最大适应度值.

证明 由 FTO 算法可知, 算法树中下一代的搜索元是由上一代的搜索元生成的. 由定理 1 与定理 2 可得下一代搜索元的最大适应度值大于等于上一代搜索元的最大适应度值.

定理 4 FTO 算法是有效的、收敛的.

证明 设问题的全局最优解为 x_{best} , $\text{fit}_{\text{best}}(t)$ 为算法第 t 代搜索元的最大适应度值. 由定理 2、定理 3 可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{fit}_{\text{best}}(t) = x_{\text{best}} \quad (10)$$

由式(10)可知,算法是有效的、收敛的.

3.3.2 FTO 算法时间复杂性分析

FTO 算法主要包括搜索元的生成与搜索树的生成两部分. 生成搜索元的计算复杂度为 $O(n * N_w^2)$, 其中 n 为搜索元的列数, N_w 为当前需要比较的元素个数, 随 n 值线性增加. 搜索树又由搜索元构成, 算法迭代一次, 树生长一层, 设算法迭代 M 次, 从而算法的时间复杂度为 $O(C * nN_w^2)$, 其中 $C = \sum_{i=1}^M F_i$. 由上述分析可知, 搜索元的大小和算法迭代次数影响着 FTO 的时间复杂性.

3.4 黄金分割 FTO 算法

由上述 FTO 算法的介绍可以看出, 基于搜索元的斐波那契树的生长是基于前一代的最优节点进行的, 同时搜索元的生成过程是一个竞争淘汰的过程, 且全局点是在整个解空间内随机产生的. 因此, 在解空间内, 如果有高低不同的山峰, 那峰值小的山峰在寻优过程中就会被淘汰, 从而影响 FTO 的多峰寻优能力.

多峰函数的山峰在解空间里均匀或者不均匀的分布着, 因此, 如果能引导 FTO 算法向山峰分布的区域寻优, 凭借 FTO 强大的全局搜索能力, 算法将很快寻找到山峰, 这样就可以把一个多峰问题转化为多个单峰的寻优问题, 提高 FTO 的多峰寻优能力. 为此, 本文在 FTO 算法的基础上引入黄金分割思想, 在 FTO 算法的斐波那契树的生长过程中, 对树的每一层的解空间范围进行黄金分割比例压缩, 则搜索元在树的不同层次有着不同的寻优范围, 同时因为黄金分割法本身具有最优性, 在寻优的过程中, 还可以利用其最优性来判断该次迭代是否需要上一次节点的最优信息, 如果上一次迭代的最优点在本次迭代的解空间内, 则利用其最优信息, 反之则放弃其启发信息. 通过上述对 FTO 算法的变化, 使得算法不仅能朝着全局最优点进化, 同时增强了算法的局部搜索能力, 提高了小峰值的寻优能力. 例如, 对于一维适应度函数的解空间为 $[0, 1]$, 则 FTO 与黄金分割 FTO 的区别如图 4 所示.

从图 4 可以看出, 引入黄金分割后, 斐波那契树的节点寻优范围每次都是黄金分割比例压缩, 从而不仅有利于多峰函数的优化, 同时保证了寻优结果的精度. 黄金分割 FTO 算法只是在 FTO 算法寻优过程中适时变换寻优空间范围, 因此, 黄金分割 FTO 算法在具备多峰性能的同时, 满足 FTO 算法的有效性 with 收敛性.

3.5 同峰判断

在利用黄金分割 FTO 算法进行多峰寻优时, 判断

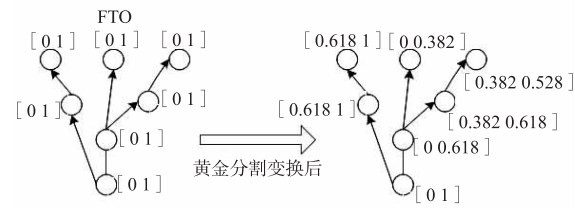


图4 黄金分割FTO

新搜索到的极值点与已发现的极值点是否同峰, 利用文献[20]所提出的基于适应度的同峰判断方法, 设 A 为峰值点集合中的极值点, B 为黄金分割 FTO 刚搜索到的极值点, 在 A, B 之间插入 $x-1$ 个点将 AB 分成 x 等份, 计算这 x 段的同峰算子, 如式(11)所示:

$$f(i) = \text{fit}(x_{i+1}) - \text{fit}(x_i) \quad (11)$$

式中: x_{i+1}, x_i 为 A, B 之间相邻两点, $1 \leq i \leq h$, 当 i 为 1 时, x_i 为点 A . 当 f 的值由正变为负, 又由负变为正, 则意味着 A, B 有山峰存在, 是异峰值点, 否则为同峰. 当新产生的极值点与已有极值点集合里的极值点都判断完后, 如果存在同峰, 则将最优极值点替换原有极值点, 反之则把新极值点加入峰值点集合.

4 仿真实验及结果分析

为了验证黄金分割 FTO 算法的多峰寻优能力, 选取了测试常用的典型多峰函数进行仿真测试, 寻找函数的极大值, 利用峰值数、精度、平均适应度值检验算法的性能. 本文实验基于 MATLAB2012a 进行仿真实验.

由 FTO 算法时间复杂性可知, 随着算法迭代次数的增加, 斐波那契树将越长越大, 从而导致算法的计算量越来越大, 运算时间极长. 为了提高本文算法的效率, 式(7)已证明在满足 0.05 的结果精度下, 黄金分割法只需 8 次试验. 因此, 本文算法的搜索元大小为 5 列, 斐波那契树前 8 层的每层搜索元数量按斐波那契数列增长, 8 层以后按第 8 层的搜索元数量生长, 且 8 层以后解空间范围不再压缩. 每个搜索元中的节点总和为 19. 如式(12)所示:

$$N_j = N_{j-1} + N_{j-2}, (j=1, \dots, 8) \quad (12)$$

$$N_j = N_8, (j=8, \dots, \text{max gen})$$

式中 N_j 为斐波那契树第 j 层搜索元个数, max gen 为算法最大迭代次数.

4.1 典型测试函数

测试函数 1^[21]:

$$f_1(x) = \sin^6[5\pi(x^{0.75} - 0.05)] \quad (13)$$

式中, $x \in [0, 1]$, 含有 5 个等高不等距的峰.

测试函数 2^[21]:

$$f_2(x) = e^{-21\log(2)(x-0.0667)^2} \sin^6(5\pi x) \quad (14)$$

式中 $x \in [0, 1]$, 含有 5 个不等高等距的峰.

测试函数 3:

$$f_3(x) = \ln(x) \cdot (\sin(e^x) + \sin(3x)) \quad (15)$$

式中 $x \in [0, 4]$, 含有 9 个不等高不同频率的峰.

测试函数 4^[22]:

$$f_4(x, y) = 200 - (x^2 + y - 11)^2 - (y^2 + x - 7)^2 \quad (16)$$

式中 $x, y \in [-6, 6]$, f_4 为线性不可分的二维多峰函数, 其典型特点是峰值点等高、非等距. 性能不佳的算法很难精确搜索到其全部 4 个峰值.

测试函数 5:

$$f_5(x, y) = \left(\frac{3}{0.05 + (x^2 + y^2)} \right)^2 + (x^2 + y^2)^2 \quad (17)$$

式中 $x, y \in [-5.12, 5.12]$, f_5 为大海捞针函数, 其典型特点解空间范围内有 1 个全局最优解和 4 个局部最优解. 性能不佳的算法容易陷入局部最优解, 找不到全局最优解.

测试函数 6:

$$f_6(x, y) = \frac{1}{1 + |(x + iy)^6 - 1|} \quad (18)$$

式中 $x, y \in [-2, 2]$, f_6 为 root 函数, 在 0.5 高度处有一个很难突破的平坦区域, 要求算法具有较好的全局收敛能力, 在 $[-2, 2]$ 上共有 6 个高度为 1 的全局最优解.

测试函数 7:

$$f_7(x, y) = 0.5 (\sin(10 \ln(x)) + \sin(10 \ln(y))) \quad (19)$$

式中 $x, y \in [0.25, 10]$, f_7 在全局范围内分布着等高, 变化频率不同的 36 个高度为 1 的峰. 性能不佳的算法很难找到全部最优解.

测试函数 8^[23]:

$$f_8(x, y) = x \sin(4\pi x) - y \sin(4\pi y + \pi) + 1 \quad (20)$$

式中 $x, y \in [-2, 2]$, f_8 是非均匀分布多峰函数, 一共有 64 个山峰和 36 个在边界上形成的优化点值.

测试函数 9^[23]:

$$f_9(x, y) = \sum_{i=1}^5 \text{icos}[(i+1)x + i] \cdot \sum_{i=1}^5 \text{icos}[(i+1)y + i] \quad (21)$$

式中 $x, y \in [-10, 10]$, f_9 在全局范围内有 9 个全局最优解, 760 个极大值点, 对算法的局部搜索能力要求较高.

测试函数 10^[23]:

$$f_{10}(x, y) = -(x^2 + y^2)^{0.25} (\sin^2(50(x^2 + y^2)^{0.1}) + 1) \quad (22)$$

式中 $x, y \in [-5.12, 5.12]$, f_{10} 在全局范围内有 1 个全局最优解, 在全局解周围有无穷局部解.

针对测试函数 $f_1 \sim f_3$ 为 1 维多峰寻优问题. 黄金分割 FTO 最大迭代次数 $\max \text{gen} = 8$, 即斐波那契树最多

长 8 层, 所需搜索元个数最多为 $\sum_{i=1}^8 F_i = 87$, 实验次数为 30 次, 寻优结果如表 1 和表 2 所示. 因测试函数 1、2 取自于文献[21], 因此本文算法的寻优结果又与文献[21]的 ANQEA(自适应小生境量子进化算法)寻优结果进行对比, 如表 3 和表 4 所示, 其计算量为寻优结束时“搜索元数量总和 \times 每个搜索元的节点总和”. 图 5 为本文算法的优化结果直观图. 测试函数 3 的寻优结果如图 5(a) 所示.

表 1 函数 f_1 的优化结果

序号	最优解的平均值	函数值	理论值
1	0.0796	0.9999	1
2	0.2469	0.9997	1
3	0.4506	0.9999	1
4	0.6813	0.9999	1
5	0.9339	0.9999	1

表 2 函数 f_2 的优化结果

序号	最优解的平均值	函数值	理论值
1	0.1001	0.9984	1
2	0.2992	0.9274	0.9274
3	0.4987	0.7711	0.7712
4	0.6991	0.5741	0.5741
5	0.8985	0.3826	0.3826

表 3 不同算法 f_1 优化结果

算法	进化规模	进化代数	有效峰数	计算量
ANQEA	60	8	5	1321
本文算法	-	5	5	361

表 4 不同算法 f_2 优化结果

算法	进化规模	进化代数	有效峰数	计算量
ANQEA	100	8	5	2204
本文算法	-	5	5	361

针对测试函数 $f_4 \sim f_7$ 为多维多峰值数寻优问题, 黄金分割 FTO 最大迭代次数 $\max \text{gen} = 100$, 即斐波那契树最多长 100 层, 实验次数为 30 次. 测试函数 $f_4 \sim f_7$ 本文寻优结果如表 5 所示.

表 5 函数 $f_4 \sim f_7$ 的优化结果

函数	理论峰值数	搜索到的最大峰值数	平均搜索的峰值数	全局最大理论值	全局寻优平均函数值
f_4	4	4	4	200	199.999
f_5	5	5	5	3600	3599.999
f_6	6	6	6	1	0.999
f_7	36	36	36	1	0.998

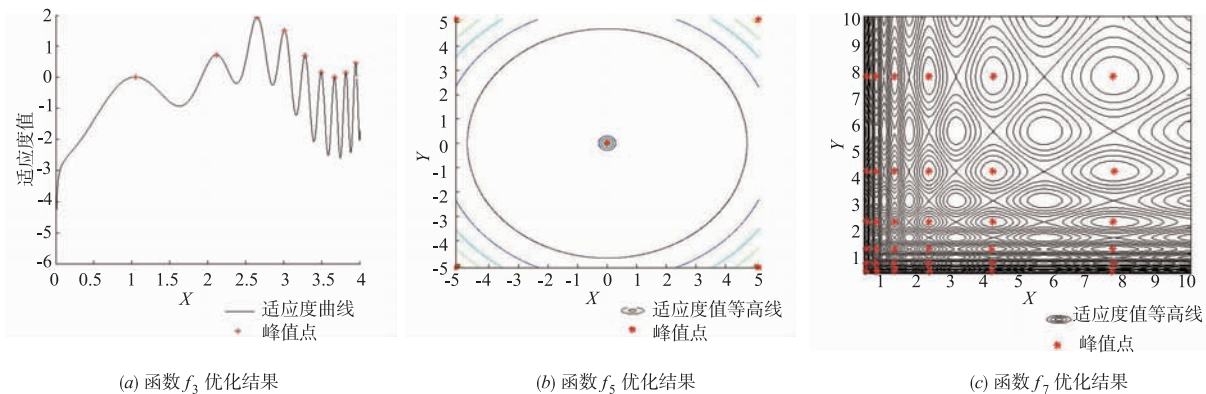


图5 优化结果直观图

针对测试函数 $f_8 \sim f_{10}$ 为多维多峰值数寻优问题,黄金分割 FTO 最大迭代次数 $\max \text{ gen} = 200$,即斐波那契树最多长 200 层,实验次数为 30 次.其寻优结果与 SH (小生境技术的适应值共享算法)、opt-aiNet (人工免疫网络算法)、CLONALG (克隆算法)、ICNA (免疫混沌网络算法)、IAFSNA (免疫人工鱼群网络算法)的寻优结果进行比较,IAFSNA 寻优结果来自文献[22],SH、CLONALG、opt-aiNet、ICNA 的结果来自文献[23].测试函数 $f_8 \sim f_{10}$ 本文寻优结果与对比结果如表 6 所示.

表 6 函数 $f_8 \sim f_{10}$ 的优化结果及其对比

函数	算法	理论峰值数	搜索到的最大峰值数	平均搜索到的峰值数	平均适应度
f_8	SH	100	7	5.2	1.674
	CLONALG		10	8.7	3.565
	opt-aiNet		92	79.4	2.652
	ICNA		100	96.1	2.538
	IAFSNA		99	95.3	-
	本文算法		100	100	2.3474
f_9	SH	760	12	10.1	144.1
	CLONALG		18	18	157.6
	opt-aiNet		736	718.4	33.46
	ICNA		760	759.1	32.73
	IAFSNA		760	759.4	-
	本文算法		760	756	30.2871
f_{10}	SH	∞	17	12.6	-1.473
	CLONALG		9	6.7	-0.362
	opt-aiNet		321	288.4	-1.889
	ICNA		737	721.3	-1.864
	IAFSNA		-	-	-
	本文算法		1500	1497	-1.6544

4.2 实验结果分析

由表 1、表 2 的结果可知本文算法找到了 1 维多峰值函数的全部峰值点,同时所得结果的精度高.由表 3 和表 4 可以看出,本文算法在得到同等结果条件下的迭代次数、计算量小于 ANQEA 算法,同时算法不

需要过多设置参数,只需给出解空间范围、迭代次数即可.由表 5 可知,本文算法对多维、峰值数量较少函数的寻优能力同样很强.对 $f_4 \sim f_7$ 这些特殊测试函数的寻优,在保证多峰成功率的同时,算法还具有很高的全局寻优精度.由表 6 可知,本文算法对 $f_8 \sim f_{10}$ 这些具有多维、大量峰值数量特点的函数同样具有较强的寻优能力,寻优结果与其他算法相比较,在峰值数量、平均适应度值方面都有明显的优势,说明算法具有较强的多峰寻优能力.图 6 为一些测试函数的三维示意图.

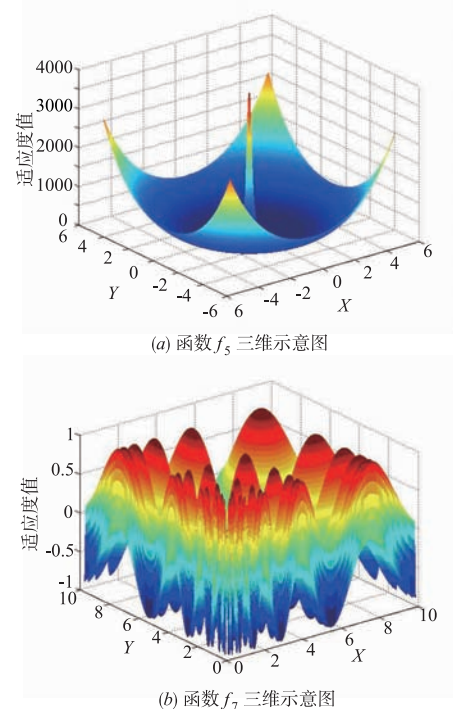


图6 测试函数三维示意图

4.3 黄金分割 FTO 算法时间复杂度分析

黄金分割 FTO 算法是由改进的 FTO 算法和同峰判断组成.同峰判断的时间复杂度为 $O(C * W)$, W 为当前峰值集合中的元素数量.因此黄金分割 FTO 算法的

时间复杂度为 $O(C * (nN_w^2 + W))$, 因此, 黄金分割 FTO 算法的时间复杂度不仅与迭代次数、搜索元大小有关, 也与函数峰值数量有关, 函数的峰值数量越多, 其寻优时间越长。

由文献[23]可知, 由于采用共享技术需比较种群个体适应度的大小, SH 算法的计算复杂度为 $O(N_i^2)$; CLONALG 算法中种群需要克隆变异, 它的计算复杂度为 $O(\beta N_i^2 l)$, 其中 N_i 为初始种群设定值, 不随代数增加而变化。 l 为抗体编码长度。 opt-aiNet 算法采用克隆选择和网络抑制策略, ICNA 算法采用混沌搜索和网络抑制策略, ANQEA 算法采用量子进化算法和小生境技术, 它们的计算复杂度都为 $O(N^2)$, N 为当前迭代次数下的种群数目, 其值随迭代次数线性增加。

由上述分析可知, 黄金分割 FTO 算法的时间复杂度在表达式上高于其他算法, 但当本文算法的搜索元大小固定时, 时间复杂度中的 nN_w^2 将会是个定值, 算法复杂度的最高级将只与迭代次数、函数峰值数量有关, 即黄金分割 FTO 算法的时间复杂度可以表示为 $O(CW)$, $O(CW) \leq O(N^2)$ 。 在实际寻优过程中由于算法本身引入黄金分割法, 从内在也加快了算法的收敛速度。 由此可知, ANQEA、opt-aiNet、ICNA 与本文算法等多峰寻优算法都是以牺牲更多时间在局部搜索上来提高局部搜索能力与多峰值能力。

综上所述, 黄金分割 FTO 算法具有如下特点:

(1) 黄金分割 FTO 算法多峰优化精度高、速度快。 FTO 算法是基于斐波那契法形成的智能算法, 其斐波那契法的最优性早已被证明, 因此 FTO 算法是一种基于最优算法的优化算法, 从而确定了算法本身的快速性与有效性。 在利用 FTO 本身算法特性的同时, 对优化问题解空间进行黄金分割比例压缩, 在保证全局搜索能力的同时提高了算法局部搜索能力。 因此, 黄金分割 FTO 算法在斐波那契法和黄金分割法两种优化算法的驱使下, 快速有效的逼近峰值点。 此特点从表 1~5、图 5 可知。

(2) 黄金分割 FTO 算法多峰优化能力强, 不易陷入局部最优。 FTO 算法本身是一种全局、局部交替寻优的算法, 其算法本身具有超强的全局搜索能力, 不易陷入局部最优。 在利用其全局搜索能力的同时, 通过对解空间的黄金分割比例压缩提高了算法的局部搜索能力, 保留了较小的峰值, 提高了多峰寻优能力。 此特点从表 5~6、图 5~6 可知。

5 结论

本文提出的黄金分割 FTO 算法对多峰函数的优化能力强、速度快、精度高。 算法利用 FTO 算法全局局部搜索特性的同时, 引入对解空间的黄金分割比例压缩,

提高了算法的局部搜索能力及对较小峰值的搜索能力, 从而提高了算法的多峰优化能力。 算法以斐波那契法与黄金分割法为基础, 保证了算法的有效性与快速性。 同时, 与其它算法相比较, 不需设置额外参数, 使得算法的结果不依赖于参数的选择, 便于实施。

本文主要集中在以理论和实验来验证黄金分割 FTO 算法对于多峰函数优化的能力, 进一步工作将集中在对更高维的多峰函数进行试验研究。

参考文献

- [1] 李宝磊, 吕丹桔, 等. 多元优化算法可达性分析[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(7): 1670 - 1675.
LI Bao-lei, LÜ Dan-ju, et al. On accessibility of multivariate optimization algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(7): 1670 - 1675. (in Chinese)
- [2] 陈晓峰, 姜慧研. 量子禁忌搜索算法的研究[J]. 电子学报, 2013, 41(11): 2161 - 2166.
CHEN Xiao-feng, JIANG Hui-yan. Research of quantum tabu search algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(11): 2161 - 2166. (in Chinese)
- [3] 朱冰莲, 朱方方, 等. 基于逻辑运算的离散人工蜂群算法[J]. 电子学报, 2015, 43(11): 2161 - 2166.
ZHU Bing-lian, ZHU Fang-fang, et al. Discrete artificial bee colony algorithm based on logic operation[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(11): 2161 - 2166. (in Chinese)
- [4] 吕振肃, 侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 416 - 420.
LU Zhen-su, HOU Zhi-rong. Particle swarm optimization with adaptive mutation[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(3): 416 - 420. (in Chinese)
- [5] DAS Swagatam, MAITY Sayan, et al. Real-parameter evolutionary multimodal optimization-A survey of the state of the art[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(2): 71 - 78.
- [6] 毕晓君, 王艳娇. 用于多峰函数优化的小生境人工蜂群算法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(11): 2564 - 2568.
BI Xiao-jun, WANG Yan-jiao. Niche artificial bee colony algorithm for multi-peak function optimization[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(11): 2564 - 2568. (in Chinese)
- [7] GOLDBERG D E, RICHARDSON J. Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization[A]. Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms on Genetic Algorithms and Their Application[C]. NJ, USA: Lawrence Erlbaum, 1987. 41 - 49.
- [8] 张梅凤, 邵诚. 多峰函数优化的生境人工鱼群算法[J].

- 控制理论与应用,2008,25(4):773-776.
- ZHANG Mei-feng, SHAO Cheng. Niche artificial fish swarm algorithm for multimodal function optimization [J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(4): 773-776. (in Chinese)
- [9] MUHAMMAD R, ABDUL R B, et al. Niching with sub-swarm based particle swarm optimization [A]. Proceedings of the International Conference on Computer Technology and Development [C]. USA: IEEE, 2009. 181-183.
- [10] LI X D. Adaptively choosing neighbourhood bests using-species in a particle swarm optimizer for multimodal function optimization [A]. Proceedings of the 2004 Genetic and Evolutionary Computation Conference [C]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2004. 105-116.
- [11] YAO Jie, KHARMA Nawwaf, et al. Bi-objective multi-population genetic algorithm for multimodal function optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2010, 14(1): 80-102.
- [12] 刘洪杰, 王秀峰. 多峰搜索的自适应遗传算法 [J]. 控制理论与应用, 2004, 21(2): 302-304.
- LIU Hong-jie, WANG Xiu-feng. Adaptive genetic algorithm for multi-peak searching [J]. Control Theory & Applications, 2004, 21(2): 302-304. (in Chinese)
- [13] 李军华, 黎明. 噪声环境下多模态函数优化的遗传算法 [J]. 电子学报, 2012, 40(2): 327-330.
- LI Jun-hua, LI Ming. Genetic algorithm for multimodal function optimization in noisy environments [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(2): 327-330. (in Chinese)
- [14] DE CASTRO L N, VON ZUBEN F J. Learning and optimization using the clonal selection principle [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(3): 239-251.
- [15] DE CASTRO L N, TIMMIS J. An artificial immune network for multimodal function optimization [A]. Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation [C]. USA: IEEE, 2002. 699-704.
- [16] LI B L, SHI X L, et al. Multivariate optimization algorithm for multimodal optimization [J]. Applied Mechanics Material, 2014, (483): 453-457.
- [17] SHI X L, GOU C X, et al. Multivariate optimization algorithm with absorption for multimodal optimization [J]. Applied Mechanics Material, 2014, (483): 458-464.
- [18] 梁展东. 黄金分割法在非无穷远之任意处的讨论 [J]. 山西大学学报(自然科学版), 1979, (Z1): 127-131.
- [19] 周云才. 黄金分割法在无穷远处是最优的 [J]. 江汉石油学院学报, 1993, 15(1): 97-101.
- ZHOU Yun-cai. Golden section method is optimal at infinite [J]. Jiangnan Petroleum Institute, 1993, 15(1): 97-101. (in Chinese)
- [20] 吴建辉, 章兢, 等. 多峰函数优化的免疫云粒子群优化算法 [J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(8): 1756-1764.
- WU Jian-hui, ZHANG Jing, et al. Immune cloud particle swarm optimization algorithm for multimodal function optimization [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2013, 34(8): 1756-1764. (in Chinese)
- [21] 陈彦龙, 张培林, 等. 面向多峰函数的自适应小生境量子进化算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(2): 403-408.
- CHEN Yan-long, ZHANG Pei-lin, et al. Adaptive niche quantum evolutionary algorithm for multimodal function [J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(2): 403-408. (in Chinese)
- [22] 邓涛, 姚宏, 杜军. 多峰函数优化的免疫人工鱼群网络算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(2): 452-456.
- DENG Tao, YAO Hong, DU Jun. Immune artificial fish swarm network algorithm for multimodal function optimization [J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(2): 452-456. (in Chinese)
- [23] 薛文涛, 吴晓蓓, 等. 多峰函数优化的免疫混沌网络算法 [J]. 系统仿真学报, 2010, 22(4): 915-920.
- XUE Wen-tao, WU Xiao-bei, et al. Immune chaotic network algorithm for multimodal function optimization [J]. Journal of System Simulation, 2010, 22(4): 915-920. (in Chinese)

作者简介



张松海 男, 1991年生, 云南大学信息学院硕士研究生. 主要研究方向为智能优化算法, 电网可靠性分析.
E-mail: 470568141@qq.com



施心陵(通讯作者) 男, 1956年生, 云南大学信息学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为智能优化算法, 自适应信号处理与信息系统, 医学电子学.
E-mail: xlshi@ynu.edu.cn

李鹏 男, 1976年生, 博士, 云南大学信息学院副教授. 研究方向为输变电系统安全诊断、预警与维护决策研究.

董易 男, 1984年生, 云南大学信息学院博士研究生. 主要研究方向为智能优化算法.

李孙寸 女, 1990年生, 云南大学信息学院硕士研究生. 主要研究方向为智能优化算法.